

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10301 (Запад без логарифмов)

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс.

Фамилия

Имя

Отчество.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

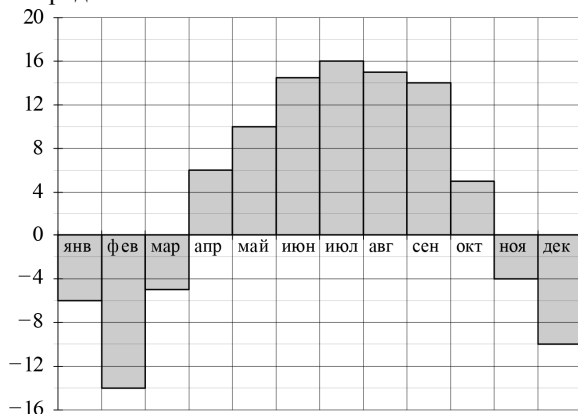
- В1** В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 26 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 590 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

Ответ: _____.

- В2** Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в 1994 году в Нижнем Новгороде.



Ответ: _____.

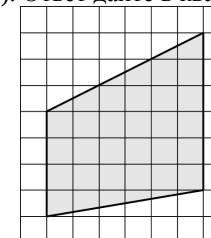
- В4** В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	11 900	15	12	910
Дельта	12 000	30	12	770
Омикрон	12 200	20	6	1700

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

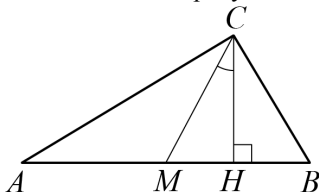
- В6** В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\sqrt{15-7x} = 8$.

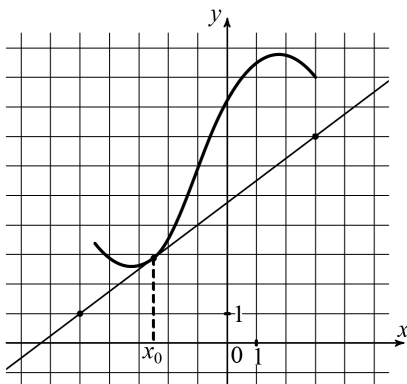
Ответ: _____.

- В8** В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



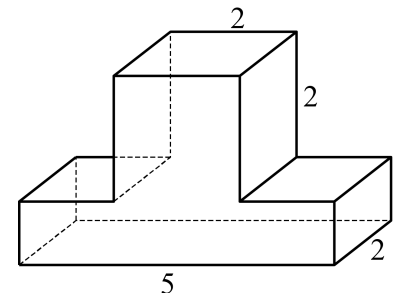
Ответ: _____.

- В9** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- В10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания В11–В15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

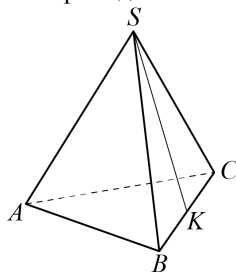
- В11** Найдите значение выражения $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

Ответ: _____.

- В12** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $5,7 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $AB=6$, а длина отрезка $SK=7$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Ответ: _____.

- B14** Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 50 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- B15** Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 18x^2 + 17$ на отрезке $[-3; 3]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

- C2** Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-5)^{-1}}{2(x-5)^{-1} - 1} \leq -0,5. \end{cases}$$

- C4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=5$, $BC=8$ и $AC=10$.

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10302 (Запад без логарифмов)

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс.

Фамилия

Имя

Отчество.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

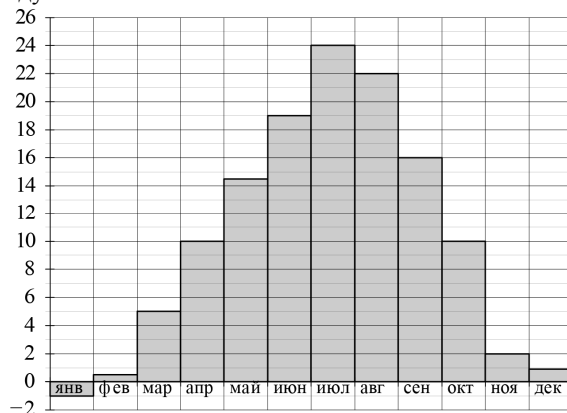
- В1** В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 36 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 800 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

Ответ: _____.

- В2** Флакон шампуня стоит 190 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Симферополе в 1988 году.



Ответ: _____.

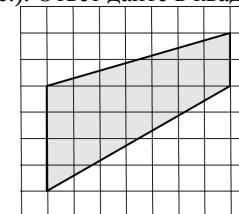
- В4** В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	10 500	10	6	1960
Дельта	11 600	5	6	2040
Омикрон	12 700	20	12	860

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

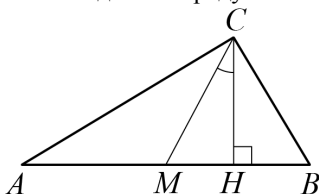
- В6** В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\sqrt{1-6x} = 7$.

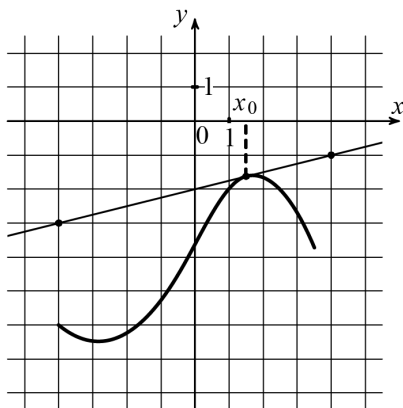
Ответ: _____.

- B8** В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 26° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



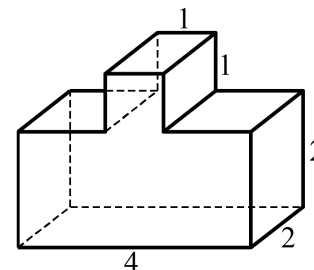
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

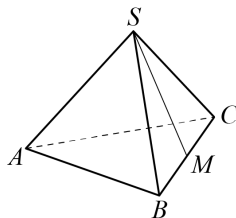
- B11** Найдите значение выражения $\frac{6\cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

Ответ: _____.

- B12** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $AB=6$, а площадь боковой поверхности равна 45. Найдите длину отрезка SM .



Ответ: _____.

- B14** Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 44 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 21 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- B15** Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 19$ на отрезке $[-6; -2]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

- C2** Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{4}{|x|} \leq \frac{20}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1} - 1} \leq -0,2. \end{cases}$$

- C4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10303 (Запад без логарифмов)

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс.

Фамилия

Имя

Отчество.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

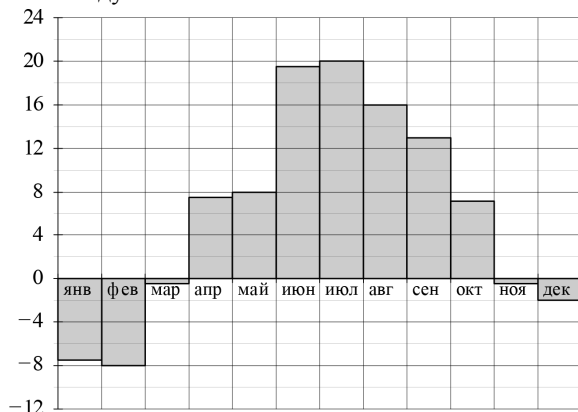
- В1** В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 33 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 730 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

Ответ: _____.

- В2** Флакон шампуня стоит 170 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Санкт-Петербурге в 1999 году.



Ответ: _____.

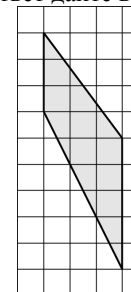
- В4** В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	9 400	10	6	1580
Дельта	9 500	20	12	720
Омикрон	9 900	20	6	1400

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наименьшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

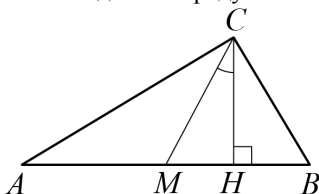
- В6** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\sqrt{9+2x} = 5$.

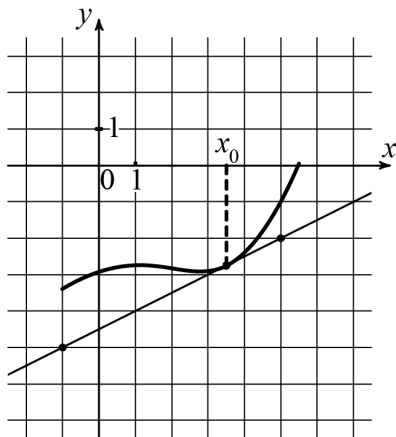
Ответ: _____.

- B8** В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 32° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



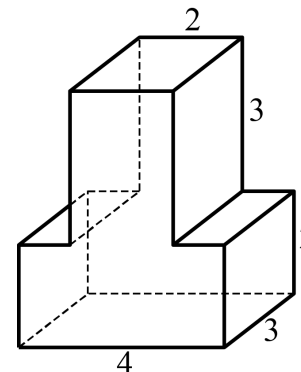
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

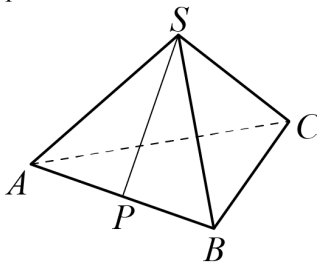
- B11** Найдите значение выражения $\frac{2 \cos 28^\circ}{\cos 152^\circ}$.

Ответ: _____.

- B12** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{72} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $1,026 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P – середина ребра AB , S – вершина. Известно, что $BC=4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка SP .



Ответ: _____.

- B14** Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 39 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 26 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- B15** Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 24x^2 + 13$ на отрезке $[-4; 4]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

- C2** Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-5)^{-1}}{2(x-5)^{-1} - 1} \leq -0,5. \end{cases}$$

- C4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

- а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

**Диагностическая работа
в формате ЕГЭ**

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10304 (Запад без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Район.	
Город (населённый пункт)	
Школа.	
Класс.	
Фамилия	
Имя	
Отчество.	

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

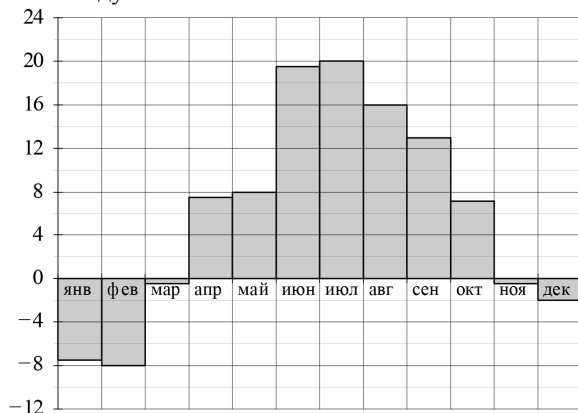
- В1** В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 26 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 590 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

Ответ: _____.

- В2** Флакон шампуня стоит 190 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Санкт-Петербурге в 1999 году.



Ответ: _____.

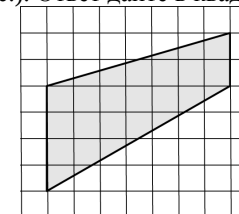
- В4** В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	11 900	15	12	910
Дельта	12 000	30	12	770
Омикрон	12 200	20	6	1700

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

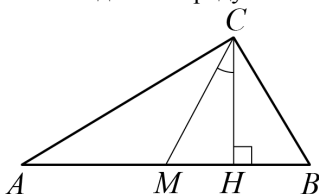
- В6** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\sqrt{15 - 7x} = 8$.

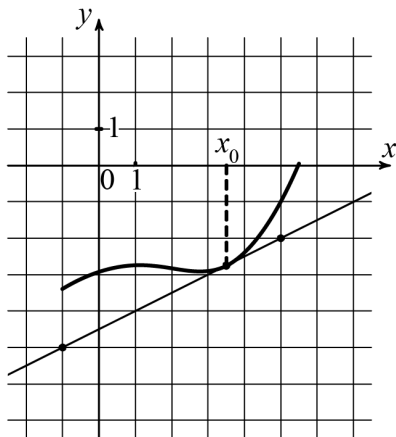
Ответ: _____.

- B8** В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 26° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



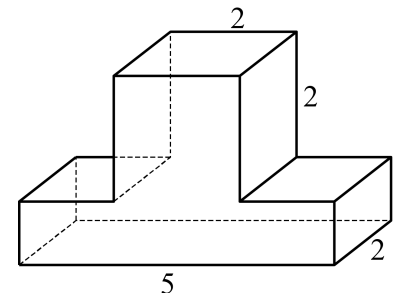
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

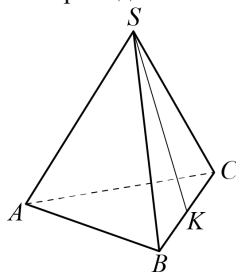
- B11** Найдите значение выражения $\frac{6\cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

Ответ: _____.

- B12** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{72} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $1,026 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $AB=6$, а длина отрезка $SK=7$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Ответ: _____.

- B14** Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 44 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 21 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- B15** Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 17$ на отрезке $[-1; 1]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

- C2** Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{4}{|x|} \leq \frac{20}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1} - 1} \leq -0,2. \end{cases}$$

- C4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10305 (Запад без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Район.	
Город (населённый пункт)	
Школа.	
Класс.	
Фамилия	
Имя	
Отчество.	

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

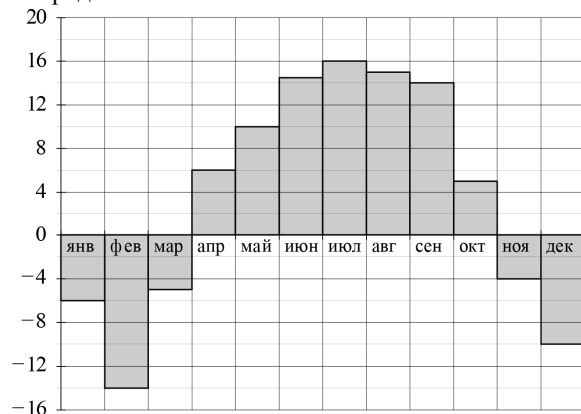
- В1** В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 26 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 590 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

Ответ: _____.

- В2** Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в 1994 году в Нижнем Новгороде.



Ответ: _____.

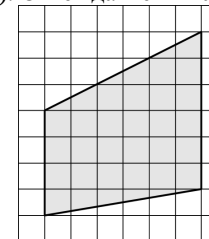
- В4** В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	11 900	15	12	910
Дельта	12 000	30	12	770
Омикрон	12 200	20	6	1700

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

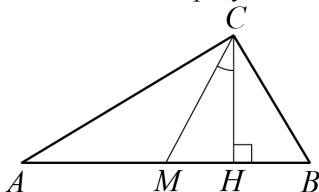
- В6** В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\log_2(4 - x) = 3$.

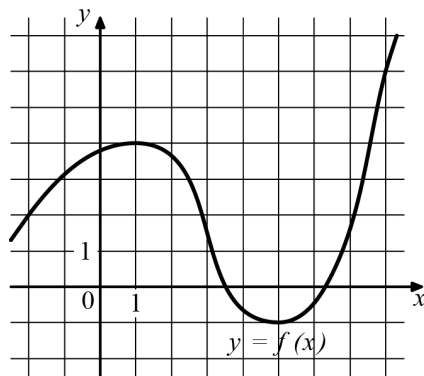
Ответ: _____.

- B8** В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



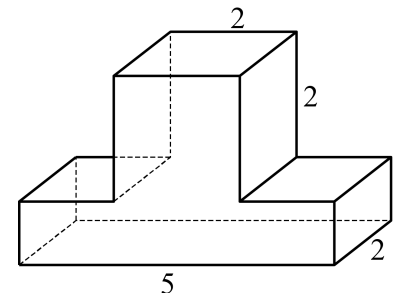
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-1; 8]$.



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

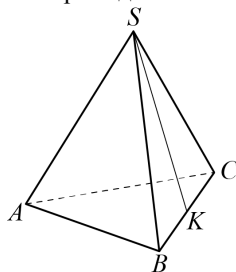
- B11** Найдите значение выражения $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

Ответ: _____.

- B12** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $5,7 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ: _____.

- В13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $AB=6$, а длина отрезка $SK=7$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Ответ: _____.

- В14** Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 50 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- В15** В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{5-3x+x^2}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- С1** а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

- С2** Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

- С3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 4 \cdot 5^x + 3 \geq 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \leq 0. \end{cases}$$

- С4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=5$, $BC=8$ и $AC=10$.

- С5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x-a^2+a+2| + |x-a^2+3a-1| = 2a-3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

- С6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10306 (Запад без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Район.	
Город (населённый пункт)	
Школа.	
Класс.	
Фамилия	
Имя	
Отчество.	

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

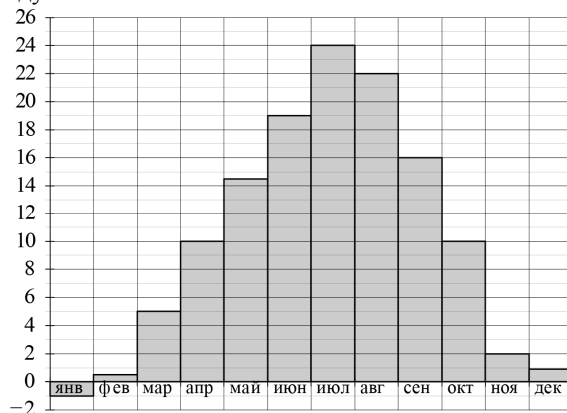
- В1** В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 36 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 800 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

Ответ: _____.

- В2** Флакон шампуня стоит 190 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Симферополе в 1988 году.



Ответ: _____.

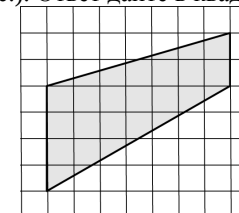
- В4** В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	10 500	10	6	1960
Дельта	11 600	5	6	2040
Омикрон	12 700	20	12	860

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

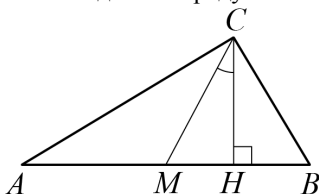
- В6** В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\log_2(-3-x) = 3$.

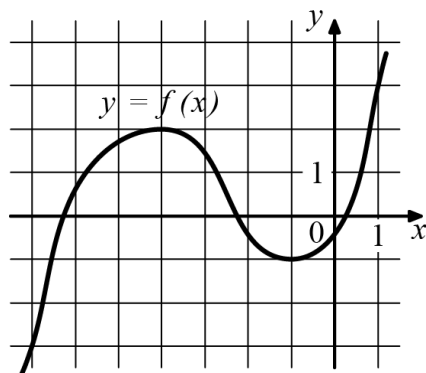
Ответ: _____.

- B8** В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 26° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



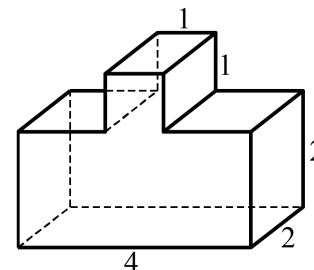
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-7; 0]$.



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

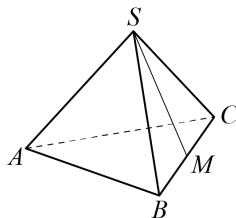
- B11** Найдите значение выражения $\frac{6\cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

Ответ: _____.

- B12** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $AB=6$, а площадь боковой поверхности равна 45. Найдите длину отрезка SM .



Ответ: _____.

- B14** Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 44 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 21 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- B15** В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{5-x-x^2}$ принимает наибольшее значение?

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

- C2** Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x - 5 \cdot 3^x + 4 \geq 0, \\ \log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 0. \end{cases}$$

- C4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=4$, $BC=7$ и $AC=8$.

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10307 (Запад без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс.

Фамилия

Имя

Отчество.

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

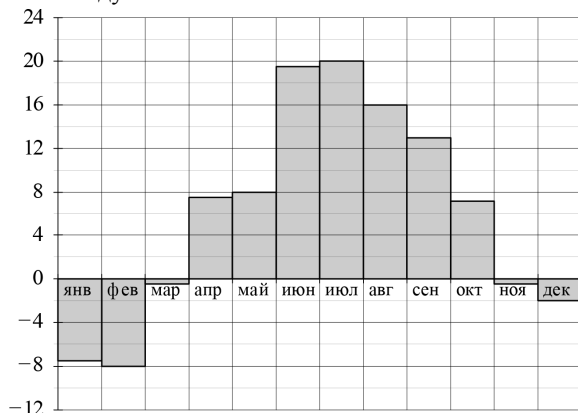
- В1** В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 33 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 730 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

Ответ: _____.

- В2** Флакон шампуня стоит 170 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Санкт-Петербурге в 1999 году.



Ответ: _____.

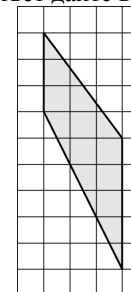
- В4** В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	9 400	10	6	1580
Дельта	9 500	20	12	720
Омикрон	9 900	20	6	1400

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наименьшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

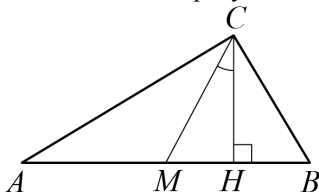
- В6** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\log_5(-2-x)=1$.

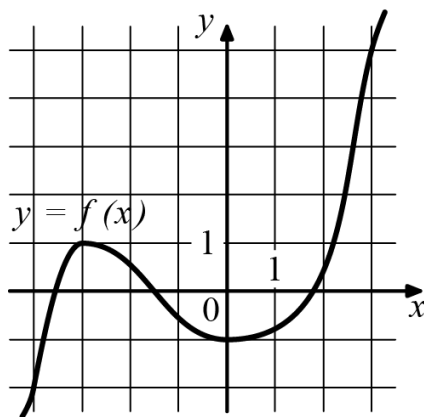
Ответ: _____.

- B8** В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 32° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



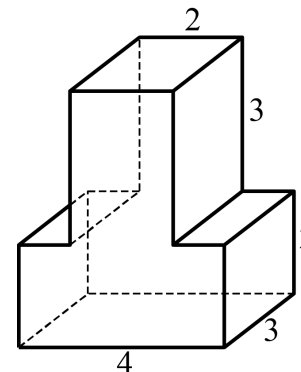
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите точку, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4; 3]$.



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

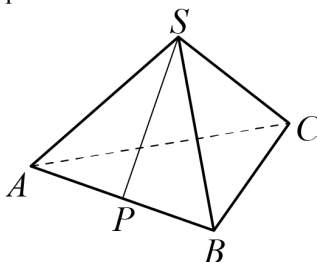
- B11** Найдите значение выражения $\frac{2\cos 28^\circ}{\cos 152^\circ}$.

Ответ: _____.

- B12** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{72} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $1,026 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P – середина ребра AB , S – вершина. Известно, что $BC=4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка SP .



Ответ: _____.

- B14** Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 39 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 26 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- B15** В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

- C2** Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 4 \cdot 5^x + 3 \geq 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \leq 0. \end{cases}$$

- C4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10308 (Запад без производной)

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс.

Фамилия

Имя

Отчество.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

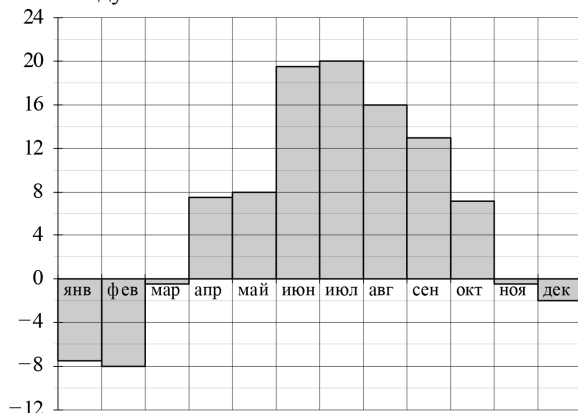
- В1** В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 26 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 590 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

Ответ: _____.

- В2** Флакон шампуня стоит 190 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Санкт-Петербурге в 1999 году.



Ответ: _____.

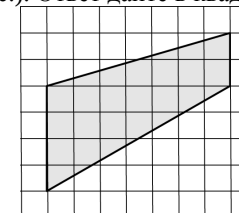
- В4** В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	11 900	15	12	910
Дельта	12 000	30	12	770
Омикрон	12 200	20	6	1700

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

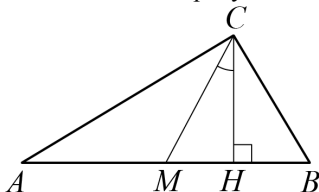
- В6** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\log_2(4 - x) = 3$.

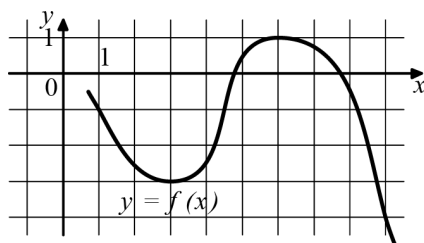
Ответ: _____.

- B8** В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 26° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



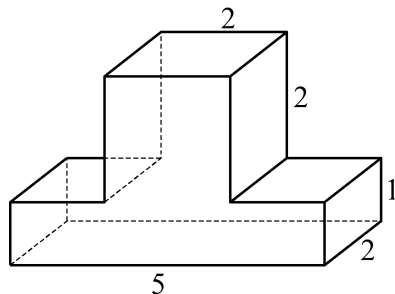
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[1; 9]$.



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

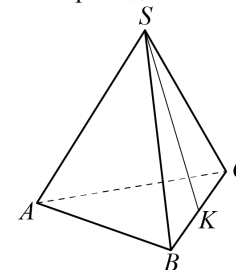
- B11** Найдите значение выражения $\frac{6\cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

Ответ: _____.

- B12** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{72} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $1,026 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $AB = 6$, а длина отрезка $SK = 7$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Ответ: _____.

- B14** Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 44 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 21 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- B15** В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{9 - 4x - x^2}$ принимает наибольшее значение?

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.
- C2** Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x - 5 \cdot 3^x + 4 \geq 0, \\ \log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 0. \end{cases}$$

- C4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.
- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.
- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10309 (Восток без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Район.	
Город (населённый пункт)	
Школа.	
Класс.	
Фамилия	
Имя	
Отчество.	

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

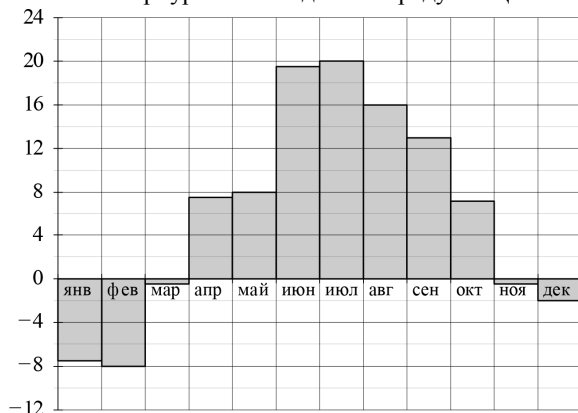
- В1** Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3900 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 1500 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 1000 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

Ответ: _____.

- В2** Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 950 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разницу средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1999 году в Санкт-Петербурге. Ответ дайте в градусах Цельсия.



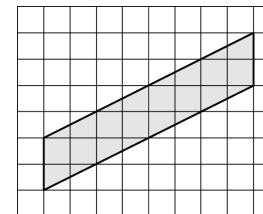
Ответ: _____.

- В4** В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести пиджак ценой 9450 руб., футболку ценой 800 руб. и галстук ценой 900 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала пиджак и футболку, а потом галстук со скидкой.
 3. Б. купит сначала пиджак и галстук, а потом футболку со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

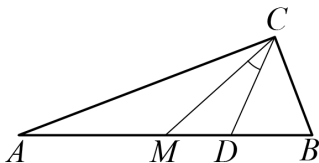
- В6** В группе туристов 5 человек, в том числе турист Д. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу Д. выпадет по жребию идти в село?

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\sqrt{25 + 3x} = 4$.

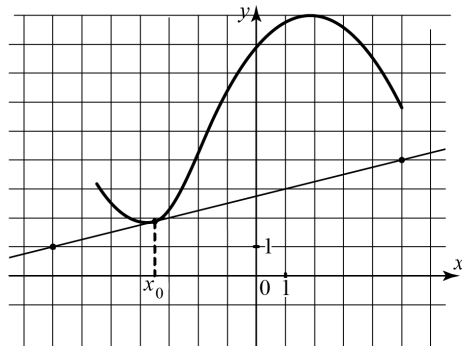
Ответ: _____.

- B8** Острые углы прямоугольного треугольника равны 69° и 21° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



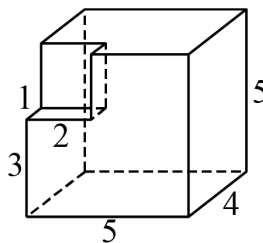
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

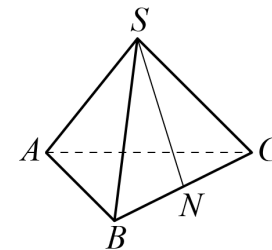
- B11** Найдите значение выражения $-20 \operatorname{tg} 52^\circ \cdot \operatorname{tg} 142^\circ$.

Ответ: _____.

- B12** К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55\text{В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,5\text{Ом}$ хотят подключить нагрузку с сопротивлением $R\text{Ом}$. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 50В? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $SN = 6$, а площадь боковой поверхности равна 72. Найдите длину отрезка AB .



Ответ: _____.

- B14** Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 16 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 96 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она меньше 60 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

B15 Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 17$ на отрезке $[-1; 1]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

C2 Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-5)^{-1}}{2(x-5)^{-1} - 1} \leq -0,5. \end{cases}$$

C4 Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке .
Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков и соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

C6 Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10310 (Восток без логарифмов)

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс.

Фамилия

Имя

Отчество.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

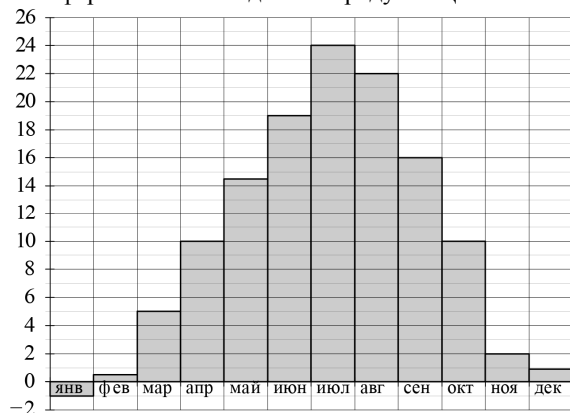
- В1** Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 1100 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 500 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

Ответ: _____.

- В2** Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 470 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1988 году в Симферополе. Ответ дайте в градусах Цельсия.



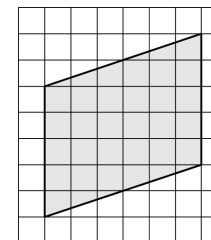
Ответ: _____.

- В4** В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести дублёнку ценой 9400 руб., футболку ценой 850 руб. и перчатки ценой 950 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала дублёнку и футболку, а потом перчатки со скидкой.
 3. Б. купит сначала дублёнку и перчатки, а потом футболку со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

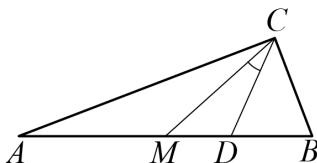
- В6** В группе туристов 8 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\sqrt{5+2x} = 3$.

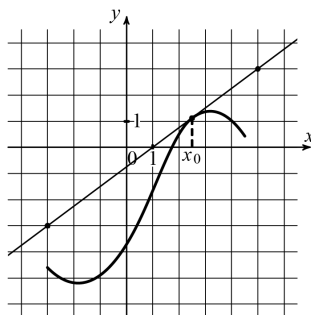
Ответ: _____.

- B8** Острые углы прямоугольного треугольника равны 87° и 3° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



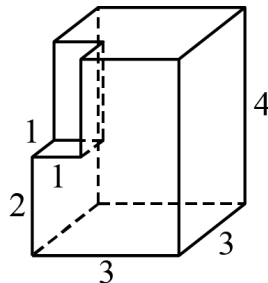
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

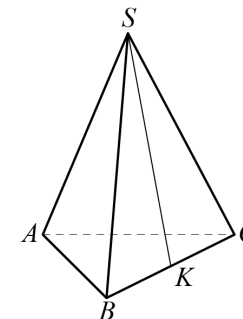
- B11** Найдите значение выражения $2\operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}105^\circ$.

Ответ: _____.

- B12** К источнику с ЭДС $\varepsilon = 65\text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,5\text{ Ом}$ хотят подключить нагрузку с сопротивлением $R\text{ Ом}$. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 60 В ? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $SK = 10$, а площадь боковой поверхности равна 60 . Найдите длину отрезка AB .



Ответ: _____.

- B14** Из точки A в точку B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/ч , а вторую половину пути — со скоростью 105 км/ч , в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 50 км/ч . Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

B15 Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 19$ на отрезке $[1; 3]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

C2 Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{4}{|x|} \leq \frac{20}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1} - 1} \leq -0,2. \end{cases}$$

C4 Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков и соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

C6 Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10311 (Восток без логарифмов)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Район.	
Город (населённый пункт)	
Школа.	
Класс.	
Фамилия	
Имя	
Отчество.	

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

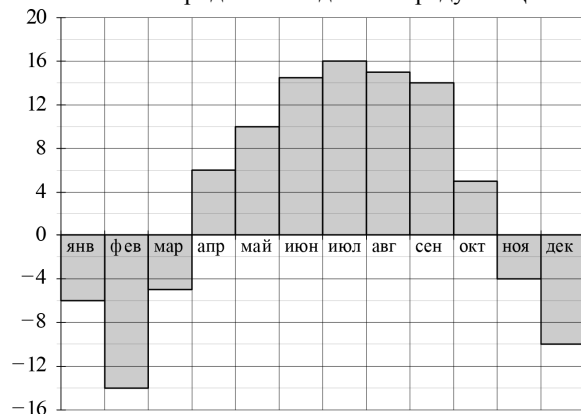
- В1** Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 900 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 400 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

Ответ: _____.

- В2** Тетрадь стоит 20 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 850 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1994 году в Нижнем Новгороде. Ответ дайте в градусах Цельсия.



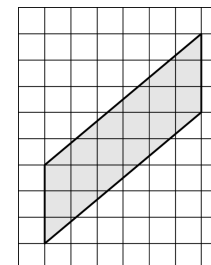
Ответ: _____.

- В4** В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести куртку ценой 9600 руб., жилет ценой 720 руб. и перчатки ценой 820 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала куртку и жилет, а потом перчатки со скидкой.
 3. Б. купит сначала куртку и перчатки, а потом жилет со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

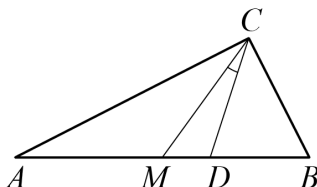
- В6** В группе туристов 10 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\sqrt{16 - 4x} = 2$.

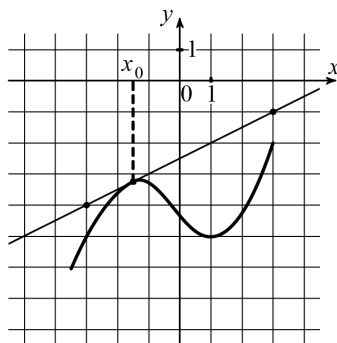
Ответ: _____.

- B8** Острые углы прямоугольного треугольника равны 63° и 27° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



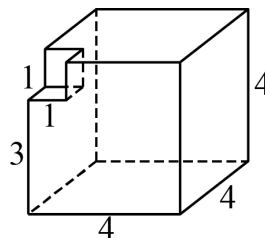
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

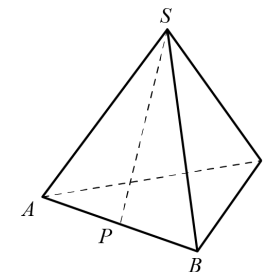
- B11** Найдите значение выражения $-50 \operatorname{tg} 27^\circ \cdot \operatorname{tg} 117^\circ$.

Ответ: _____.

- B12** К источнику с ЭДС $\varepsilon = 155 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,5 \text{ Ом}$ хотят подключить нагрузку с сопротивлением $R \text{ Ом}$. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 150 В ? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P – середина ребра AB , S – вершина. Известно, что $SP = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24 . Найдите длину отрезка BC .



Ответ: _____.

- B14** Из точки A в точку B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 7 км/ч , а вторую половину пути – со скоростью 72 км/ч , в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 30 км/ч . Ответ дайте в км/ч .

Ответ: _____.

- B15** Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 11$ на отрезке $[-0,5; 0,5]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

- C2** Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

- C3** Решите систему неравенств
- $$\begin{cases} 1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-5)^{-1}}{2(x-5)^{-1} - 1} \leq -0,5. \end{cases}$$

- C4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке .
Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков и соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10312 (Восток без логарифмов)

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс.

Фамилия

Имя

Отчество.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

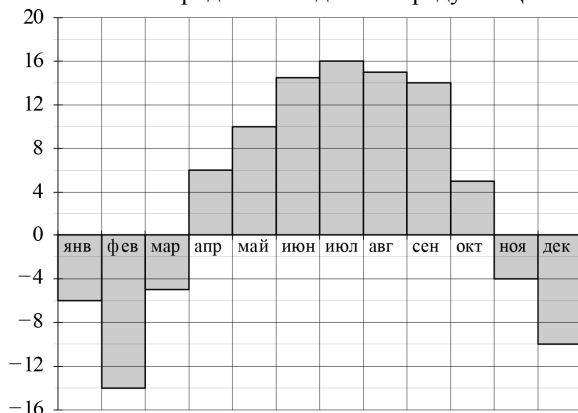
- В1** Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3900 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 1500 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 1000 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

Ответ: _____.

- В2** Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 470 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1994 году в Нижнем Новгороде. Ответ дайте в градусах Цельсия.



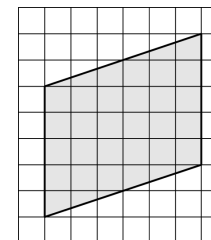
Ответ: _____.

- В4** В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести пиджак ценой 9450 руб., футболку ценой 800 руб. и галстук ценой 900 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала пиджак и футболку, а потом галстук со скидкой.
 3. Б. купит сначала пиджак и галстук, а потом футболку со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

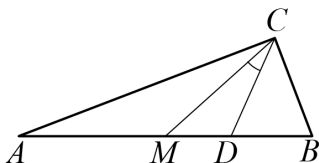
- В6** В группе туристов 10 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\sqrt{25 + 3x} = 4$.

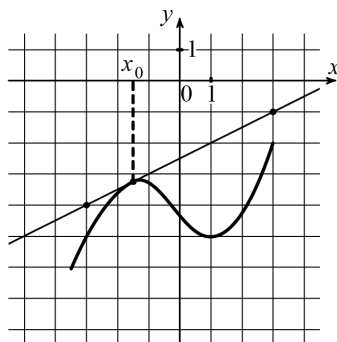
Ответ: _____.

- B8** Острые углы прямоугольного треугольника равны 87° и 3° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



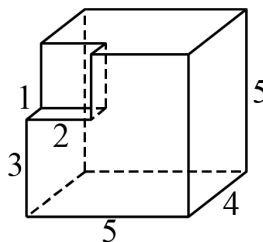
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

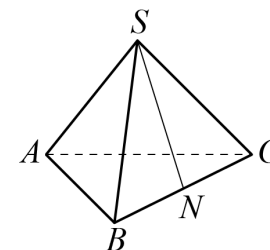
- B11** Найдите значение выражения $2\operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}105^\circ$.

Ответ: _____.

- B12** К источнику с ЭДС $\varepsilon = 155\text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,5\text{ Ом}$ хотят подключить нагрузку с сопротивлением $R\text{ Ом}$. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 150 В ? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $SN = 6$, а площадь боковой поверхности равна 72 . Найдите длину отрезка AB .



Ответ: _____.

- B14** Из точки A в точку B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/ч , а вторую половину пути — со скоростью 105 км/ч , в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 50 км/ч . Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

B15 Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 24x^2 + 13$ на отрезке $[-4; 4]$.

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

C2 Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{4}{|x|} \leq \frac{20}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1} - 1} \leq -0,2. \end{cases}$$

C4 Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков и соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

C6 Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10313 (Восток без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Район.	
Город (населённый пункт)	
Школа.	
Класс.	
Фамилия	
Имя	
Отчество.	

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

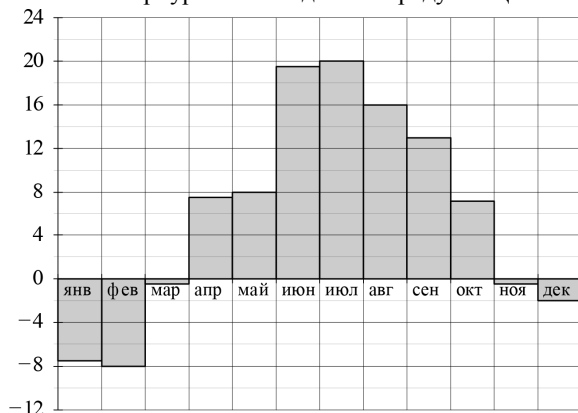
- В1** Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3900 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 1500 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 1000 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

Ответ: _____.

- В2** Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 950 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разницу средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1999 году в Санкт-Петербурге. Ответ дайте в градусах Цельсия.



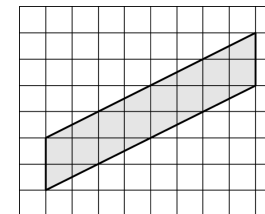
Ответ: _____.

- В4** В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести пиджак ценой 9450 руб., футболку ценой 800 руб. и галстук ценой 900 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала пиджак и футболку, а потом галстук со скидкой.
 3. Б. купит сначала пиджак и галстук, а потом футболку со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

- В6** В группе туристов 5 человек, в том числе турист Д. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу Д. выпадет по жребию идти в село?

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\log_2(-5-x)=3$.

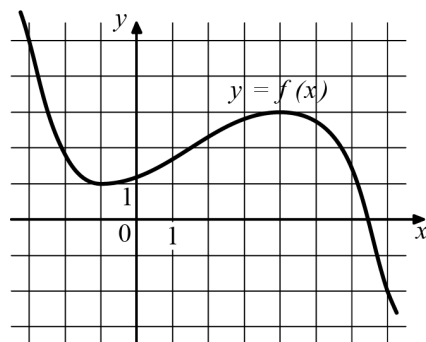
Ответ: _____.

- B8** Острые углы прямоугольного треугольника равны 69° и 21° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



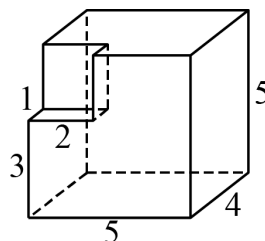
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите точку, в которой функция $f(x)$ принимает наименьшее значение на отрезке $[-3; 7]$.



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

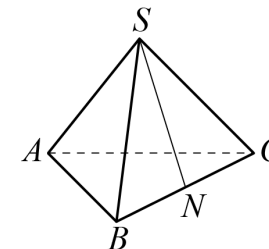
- B11** Найдите значение выражения $-20 \operatorname{tg} 52^\circ \cdot \operatorname{tg} 142^\circ$.

Ответ: _____.

- B12** К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55\text{В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,5\text{Ом}$ хотят подключить нагрузку с сопротивлением $R\text{Ом}$. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 50В? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $SN = 6$, а площадь боковой поверхности равна 72. Найдите длину отрезка AB .



Ответ: _____.

- B14** Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 16 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 96 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она меньше 60 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

B15 В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{9 - 4x - x^2}$ принимает наибольшее значение?

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

C2 Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 4 \cdot 5^x + 3 \geq 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \leq 0. \end{cases}$$

C4 Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке .
Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков и соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

C6 Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10314 (Восток без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Район.

Город (населённый пункт)

Школа.

Класс.

Фамилия

Имя

Отчество.

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

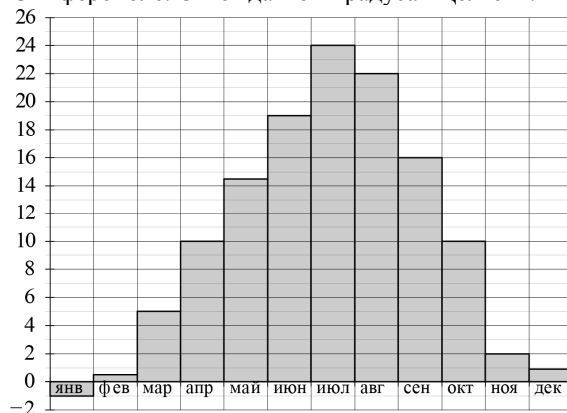
- В1** Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 1100 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 500 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

Ответ: _____.

- В2** Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 470 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1988 году в Симферополе. Ответ дайте в градусах Цельсия.



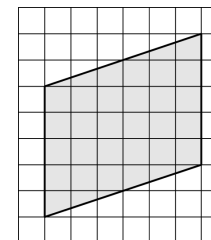
Ответ: _____.

- В4** В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести дублёнку ценой 9400 руб., футболку ценой 850 руб. и перчатки ценой 950 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала дублёнку и футболку, а потом перчатки со скидкой.
 3. Б. купит сначала дублёнку и перчатки, а потом футболку со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

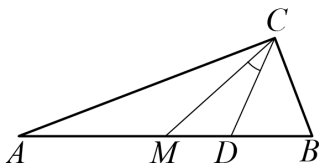
- В6** В группе туристов 8 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\log_5(-4-x) = 2$.

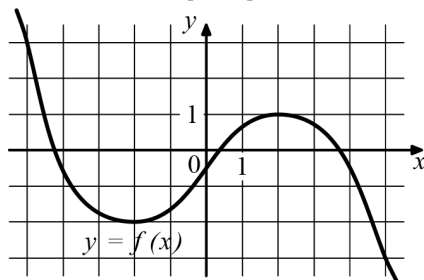
Ответ: _____.

- B8** Острые углы прямоугольного треугольника равны 87° и 3° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



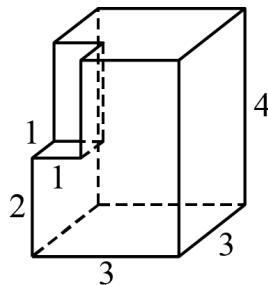
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 5]$.



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

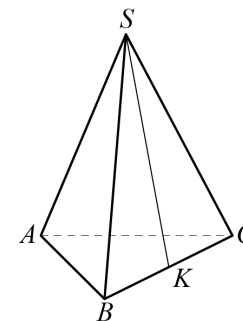
- B11** Найдите значение выражения $2\operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}105^\circ$.

Ответ: _____.

- B12** К источнику с ЭДС $\varepsilon = 65\text{В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,5\text{Ом}$ хотят подключить нагрузку с сопротивлением $R\text{Ом}$. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 60В? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $SK = 10$, а площадь боковой поверхности равна 60. Найдите длину отрезка AB .



Ответ: _____.

- B14** Из точки A в точку B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 105 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 50 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- B15** В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 5}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

- C2** Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

- C3** Решите систему неравенств
- $$\begin{cases} 9^x - 5 \cdot 3^x + 4 \geq 0, \\ \log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 0. \end{cases}$$

- C4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке .
 Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков и соответственно.
 а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
 б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
 а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10315 (Восток без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Район.	
Город (населённый пункт)	
Школа.	
Класс.	
Фамилия	
Имя	
Отчество.	

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

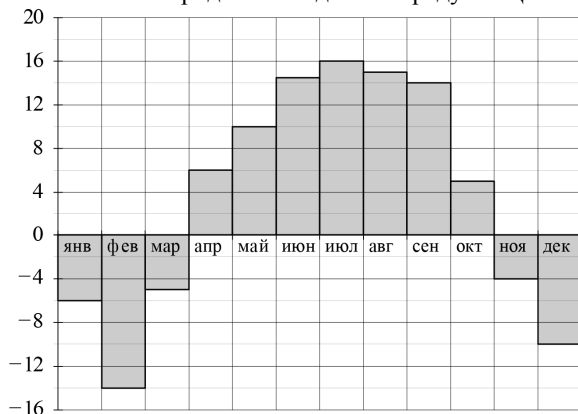
- В1** Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 900 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 400 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

Ответ: _____.

- В2** Тетрадь стоит 20 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 850 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1994 году в Нижнем Новгороде. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: _____.

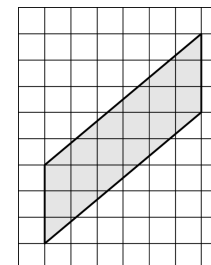
- В4** В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести куртку ценой 9600 руб., жилет ценой 720 руб. и перчатки ценой 820 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
2. Б. купит сначала куртку и жилет, а потом перчатки со скидкой.
3. Б. купит сначала куртку и перчатки, а потом жилет со скидкой.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

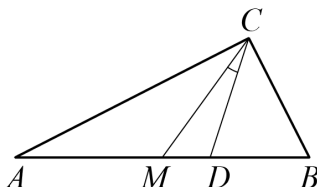
- В6** В группе туристов 10 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\log_3(-5-x)=1$.

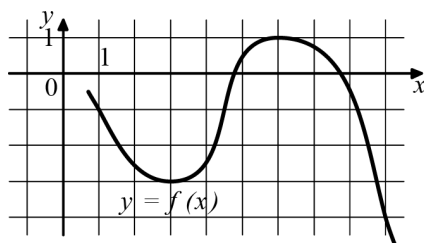
Ответ: _____.

- B8** Острые углы прямоугольного треугольника равны 63° и 27° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



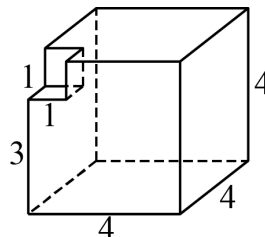
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[1; 9]$.



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

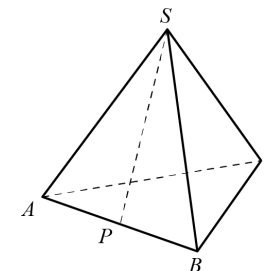
- B11** Найдите значение выражения $-50 \operatorname{tg} 27^\circ \cdot \operatorname{tg} 117^\circ$.

Ответ: _____.

- B12** К источнику с ЭДС $\varepsilon = 155 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,5 \text{ Ом}$ хотят подключить нагрузку с сопротивлением $R \text{ Ом}$. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 150 В ? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P – середина ребра AB , S – вершина. Известно, что $SP = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка BC .



Ответ: _____.

- B14** Из точки A в точку B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 7 км/ч , а вторую половину пути – со скоростью 72 км/ч , в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 30 км/ч . Ответ дайте в км/ч .

Ответ: _____.

B15

В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{3 - 3x - 2x^2}$ принимает наибольшее значение?

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

- а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

C2

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 4 \cdot 5^x + 3 \geq 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \leq 0. \end{cases}$$

C4

Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке .
 Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков и соответственно.

- а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
 б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

C5

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

C6

Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Диагностическая работа

в формате ЕГЭ

по МАТЕМАТИКЕ

12 декабря 2013 года

11 класс

Вариант МА10316 (Восток без производной)

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания В1–В10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания В11–В15 и С1–С6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий В1–В15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий С1–С6 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Район.	
Город (населённый пункт)	
Школа.	
Класс.	
Фамилия	
Имя	
Отчество.	

Часть 1

Ответом на задания В1–В10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

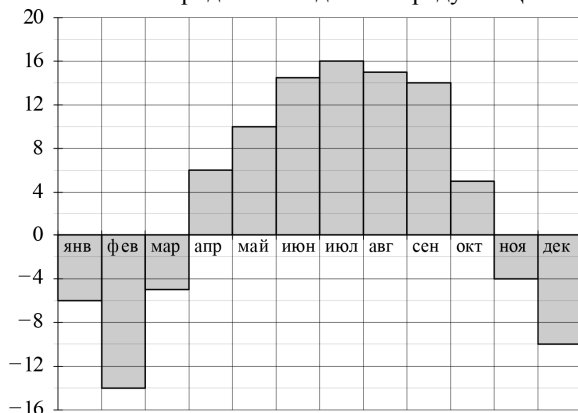
- В1** Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3900 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 1500 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 1000 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

Ответ: _____.

- В2** Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 470 рублей после понижения цены на 25%?

Ответ: _____.

- В3** На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1994 году в Нижнем Новгороде. Ответ дайте в градусах Цельсия.



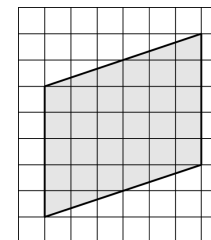
Ответ: _____.

- В4** В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести пиджак ценой 9450 руб., футболку ценой 800 руб. и галстук ценой 900 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала пиджак и футболку, а потом галстук со скидкой.
 3. Б. купит сначала пиджак и галстук, а потом футболку со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

Ответ: _____.

- В5** Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

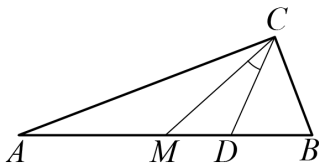
- В6** В группе туристов 10 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

Ответ: _____.

- В7** Найдите корень уравнения $\log_2(-5-x) = 3$.

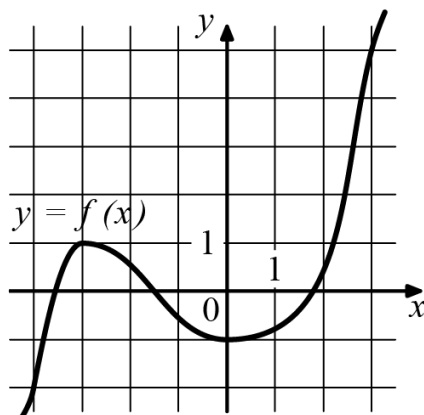
Ответ: _____.

- B8** Острые углы прямоугольного треугольника равны 87° и 3° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



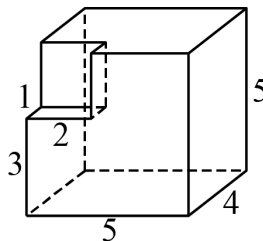
Ответ: _____.

- B9** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите точку, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4; 3]$.



Ответ: _____.

- B10** Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: _____.

Часть 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерений писать не нужно.

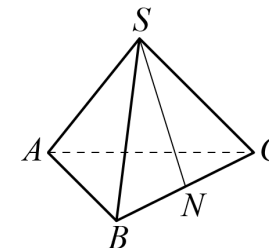
- B11** Найдите значение выражения $2\operatorname{tg}15^\circ \cdot \operatorname{tg}105^\circ$.

Ответ: _____.

- B12** К источнику с ЭДС $\varepsilon = 155\text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,5\text{ Ом}$ хотят подключить нагрузку с сопротивлением $R\text{ Ом}$. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 150 В ? Ответ выразите в омах.

Ответ: _____.

- B13** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N – середина ребра BC , S – вершина. Известно, что $SN = 6$, а площадь боковой поверхности равна 72 . Найдите длину отрезка AB .



Ответ: _____.

- B14** Из точки A в точку B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/ч , а вторую половину пути — со скоростью 105 км/ч , в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 50 км/ч . Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

B15 В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{5 - 3x + x^2}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: _____.

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

C2 Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x - 5 \cdot 3^x + 4 \geq 0, \\ \log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 0. \end{cases}$$

C4 Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков и соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

C6 Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Без логарифмов	Вар	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	B15
	1	60	8	5	12840	30	0.25	-7	59	0.75	18	-4	4000	63	60	17
	2	100	8	1	12860	21	0.5	-8	58	0.25	18	-6	6000	5	56	51
	3	95	8	5	10380	12	0.125	8	61	0.5	42	-2	6000	4	52	13
	4	60	8	5	12840	21	0.125	-7	58	0.5	18	-6	6000	63	56	17
	9	8	42	28	11060	16	0.6	-3	24	0.25	96	20	5	8	48	17
	10	7	15	25	11105	30	0.25	2	42	0.75	34	-2	6	4	84	15
	11	8	56	30	11058	18	0.2	3	18	0.5	63	50	15	4	63	11
	12	8	15	30	11060	30	0.2	-3	42	0.5	96	-2	15	8	84	13

Без производной

5	60	8	5	12840	30	0,25	-4	59	6	18	-4	4000	63	60	1,5
6	100	8	1	12860	21	0,5	-11	58	-3	18	-6	6000	5	56	-0,5
7	95	8	5	10380	12	0,125	-7	61	3	42	-2	6000	4	52	4
8	60	8	5	12840	21	0,125	-4	58	-4	18	-6	6000	63	56	-2
13	8	42	28	11060	16	0,6	-13	24	7	96	20	5	8	48	-2
14	7	15	25	11105	30	0,25	-29	42	3	34	-2	6	4	84	1,25
15	8	56	30	11058	18	0,2	-8	18	-4	63	50	15	4	63	-0,75
16	8	15	30	11060	30	0,2	-13	42	3	96	-2	15	8	84	1,5

Математика. 11 класс.

Вариант МА10301-10303

(без логарифмов)

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

- а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 x = \frac{1}{4}(\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2}\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{2} + 3\cos 2x + 1 = 0;$$

$$\cos^2 2x + 4\cos 2x + 3 = 0.$$

Сделаем замену $t = \cos 2x$. Получим

$$t^2 + 4t + 3 = 0;$$

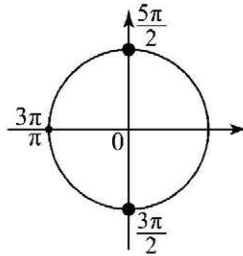
$$t = -1 \text{ или } t = -3;$$

$$\cos 2x = -1 \text{ или } \cos 2x = -3.$$

Уравнение $\cos 2x = -3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x = -1$ получаем

$$2x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

- б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим $x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

0

Максимальный балл

2

C2

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

Решение.

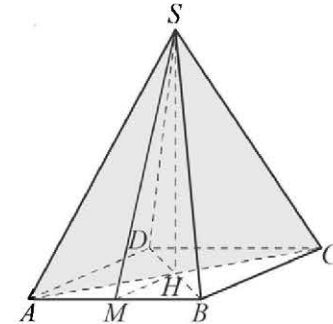
Площадь основания пирамиды равна $144 - 108 = 36$, поэтому $AB = 6$.

Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4} = 27$. Пусть SM – высота грани SAB .

Тогда $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 3 = 27$, поэтому $SM = 9$. Пусть SH – высота пирамиды. Имеем

$$SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 36$.



Ответ: 36.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-5)^{-1}}{2(x-5)^{-1} - 1} \leq -0,5. \end{cases}$$

Решение:

Решим первое неравенство:

$$1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}; \quad \frac{x^2 - 2|x| - 23}{x^2} \leq 0; \quad \frac{(|x| - 1 - 2\sqrt{6})(|x| + 2\sqrt{6} - 1)}{x^2} \leq 0;$$

$$\frac{(x - 1 - 2\sqrt{6})(x + 1 + 2\sqrt{6})}{x^2} \leq 0.$$

Получаем $-1 - 2\sqrt{6} \leq x < 0$ или $0 < x \leq 1 + 2\sqrt{6}$.Решим второе неравенство. Сделаем замену $y = \frac{1}{x-5}$. Получим:

$$\frac{2-y}{2y-1} \leq -0,5; \quad \frac{1,5}{2y-1} \leq 0; \quad y < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\frac{1}{x-5} < \frac{1}{2}$; $\frac{7-x}{x-5} < 0$; $x < 5$ или $x > 7$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств.

Поскольку $5 < 1 + 2\sqrt{6} < 7$, получаем

$$-1 - 2\sqrt{6} \leq x < 0 \text{ или } 0 < x < 5.$$

Ответ: $[-1 - 2\sqrt{6}; 0)$, $(0; 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4

Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Решение:

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

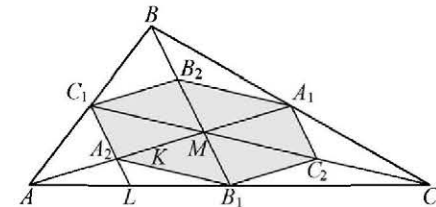
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

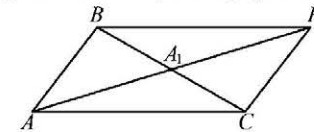
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, \quad S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, \quad S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, \quad S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $AP = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2, \quad \text{откуда} \quad AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2). \quad \text{Аналогично}$$

доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$.

Отрезок C_1A_2 – средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$.

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b .	3
Получен обоснованный ответ в пункте b , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C5

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

Решение:

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 3a - 1) - (x - a^2 + a + 2) = 2a - 3.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 3a - 1$, $n = x - a^2 + a + 2$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем

$$\begin{aligned} x - a^2 + a + 2 \leq 0 \leq x - a^2 + 3a - 1; \\ a^2 - 3a + 1 \leq x \leq a^2 - a - 2. \end{aligned}$$

Уравнение имеет корни, ни один из которых не принадлежит интервалу $(4; 19)$, только если правая граница отрезка решений не больше 4 или левая граница не меньше 19. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 \leq a^2 - a - 2, \\ a^2 - a - 2 \leq 4, \\ a^2 - 3a + 1 \geq 19, \end{cases} \begin{cases} 2a \geq 3, \\ a^2 - a - 6 \leq 0, \\ a^2 - 3a - 18 \geq 0, \end{cases} \begin{cases} a \geq 1,5, \\ (a-3)(a+2) \leq 0, \\ (a-6)(a+3) \geq 0, \end{cases} \begin{cases} a \geq 1,5, \\ a \leq -3, \\ -2 \leq a \leq 3, \\ a \geq 6. \end{cases}$$

Ответ: $1,5 \leq a \leq 3$; $a \geq 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

C6

Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна $36 - 14 = 22$. Если добавить число 4, то разность будет равна $100 - 30 = 70$, что ровно на 48 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ &= 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ &+ 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ &+ \dots + \\ &+ 2a_3(a_1 + a_2) + \\ &+ 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d – разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1440,$$

откуда $n \leq 11$. Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1440$ следует, что n является делителем числа 1440. Значит, $n \neq 11$.

Если $n = 10$, получаем

$$(a_1 + 10d)(2a_1 + 9d) = 144.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $90d^2 \geq 90 \cdot 4 = 360 > 144$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 9$, получаем

$$(a_1 + 9d)(2a_1 + 8d) = 160.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $72d^2 \geq 72 \cdot 4 = 288 > 160$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 8$, получаем:

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 180.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 180$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 124 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 4.

Значит, прогрессия из восьми чисел 4, 5, 6, ..., 11 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в.	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах б и в или в пунктах а и б.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены.	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Математика. 11 класс.
Вариант МА10302-10304 (без логарифмов)
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

- а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 2x = \frac{1}{4}(\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1 + 3\cos 4x - 1 = 0;$$

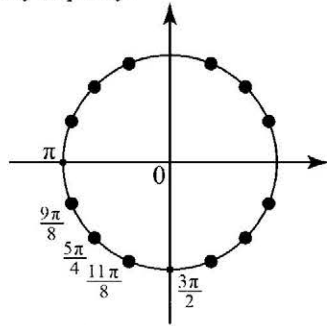
$$\cos^2 4x + \cos 4x = 0;$$

$$\cos 4x = -1 \quad \text{или} \quad \cos 4x = 0.$$

$$4x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим: $x = \frac{9\pi}{8}$; $x = \frac{5\pi}{4}$; $x = \frac{11\pi}{8}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

0

Максимальный балл

2

C2

Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

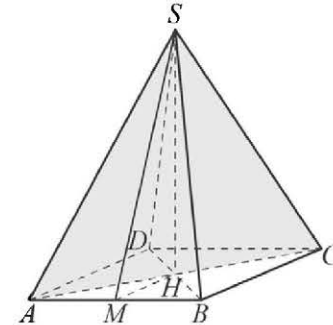
Решение.

Сторона основания пирамиды равна 8. Тогда диагональ основания AC равна $8\sqrt{2}$. Пусть SH – высота пирамиды. Тогда площадь сечения, проходящего через S и диагональ AC , равна $\frac{1}{2}AC \cdot SH = 64$, откуда

$$SH = \frac{2 \cdot 64}{8\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}. \text{ Пусть } SM - \text{высота грани } SAB. \text{ Тогда}$$

$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{128 + 16} = 12.$$

Следовательно, $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 = 48$. Поэтому площадь боковой поверхности равна $48 \cdot 4 = 192$.



Ответ: 192.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{4}{|x|} \leq \frac{20}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1} - 1} \leq -0,2. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$1 - \frac{4}{|x|} \leq \frac{20}{x^2}; \quad \frac{x^2 - 4|x| - 20}{x^2} \leq 0; \quad \frac{(|x| - 2 - 2\sqrt{6})(|x| + 2\sqrt{6} - 2)}{x^2} \leq 0;$$

$$\frac{(x - 2 - 2\sqrt{6})(x + 2 + 2\sqrt{6})}{x^2} \leq 0.$$

Получаем $-2 - 2\sqrt{6} \leq x < 0$ или $0 < x \leq 2 + 2\sqrt{6}$.

Решим второе неравенство. Сделаем замену $y = \frac{1}{x-6}$. Получим

$$\frac{2-y}{5y-1} \leq -0,2; \quad \frac{1,8}{5y-1} \leq 0; \quad y < \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $\frac{1}{x-6} < \frac{1}{5}$; $\frac{11-x}{x-6} < 0$; $x < 6$ или $x > 11$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств.

Поскольку $6 < 2 + 2\sqrt{6} < 11$, получаем

$$-2 - 2\sqrt{6} \leq x < 0 \text{ или } 0 < x < 6.$$

Ответ: $[-2 - 2\sqrt{6}; 0)$, $(0; 6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

Решение.

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

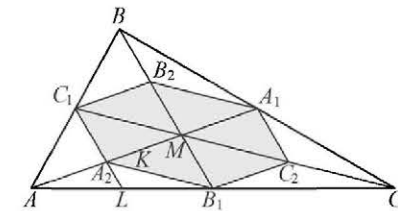
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

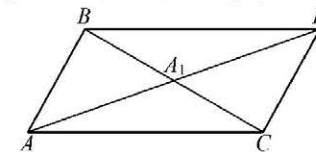
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, \quad S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, \quad S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, \quad S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2$, откуда $AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Аналогично доказыва-
ется, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$.

Отрезок C_1A_2 – средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое
меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$.

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ:

сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{43}{2}$.

Ответ: $\frac{43}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b .	3
Получен обоснованный ответ в пункте b , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5, 23]$.

Решение.

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 4a - 2) - (x - a^2 + 2a + 3) = 2a - 5.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 4a - 2$, $n = x - a^2 + 2a + 3$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем:

$$\begin{aligned} x - a^2 + 2a + 3 &\leq 0 \leq x - a^2 + 4a - 2; \\ a^2 - 4a + 2 &\leq x \leq a^2 - 2a - 3. \end{aligned}$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $[5, 23]$, только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 2 \leq a^2 - 2a - 3, \\ a^2 - 2a - 3 \geq 5, \\ a^2 - 4a + 2 \leq 23; \end{cases} \begin{cases} 2a \geq 5, \\ a^2 - 2a - 8 \geq 0, \\ a^2 - 4a - 21 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq 2,5, \\ (a - 4)(a + 2) \geq 0, \\ (a - 7)(a + 3) \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq 2,5, \\ -3 \leq a \leq -2, \\ 4 \leq a \leq 7. \end{cases}$$

Ответ: $4 \leq a \leq 7$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

C6

Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Например, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов этих чисел равна $25 - 13 = 12$. Если добавить число 4, то разность будет равна $81 - 29 = 52$, что ровно на 40 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ & = 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ & + 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ & + \dots + \\ & + 2a_3(a_1 + a_2) + \\ & + 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d – разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1768,$$

откуда $n \leq 12$. Значит, 13 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1768$ следует, что n является делителем числа $1768 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 17$. Наибольший делитель, меньший 13, равен 8. При $n = 8$ получаем

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 221.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше, чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 221$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 165 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 5.

Значит, прогрессия из восьми чисел 5, 6, 7, ..., 12 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 2, 3; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в.	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах б и в или в пунктах а и б.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены.	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Математика. 11 класс.
Вариант МА10305-10307 (без производной)
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

- а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 x = \frac{1}{4}(\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2}\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{2} + 3\cos 2x + 1 = 0;$$

$$\cos^2 2x + 4\cos 2x + 3 = 0.$$

Сделаем замену $t = \cos 2x$. Получим

$$t^2 + 4t + 3 = 0;$$

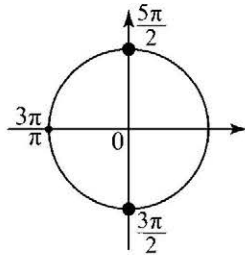
$$t = -1 \text{ или } t = -3;$$

$$\cos 2x = -1 \text{ или } \cos 2x = -3.$$

Уравнение $\cos 2x = -3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x = -1$ получаем

$$2x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим $x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

0

Максимальный балл

2

C2

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

Решение.

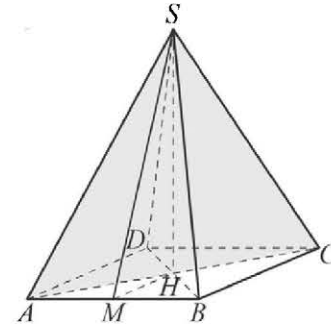
Площадь основания пирамиды равна $144 - 108 = 36$, поэтому $AB = 6$.

Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4} = 27$. Пусть SM – высота грани SAB .

Тогда $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 3 = 27$, поэтому $SM = 9$. Пусть SH – высота пирамиды. Имеем

$$SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 36$.



Ответ: 36.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 4 \cdot 5^x + 3 \geq 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделав замену $y = 5^x$, получаем

$$y^2 - 4y + 3 \geq 0; \quad y \leq 1 \text{ или } y \geq 3.$$

Значит, $x \leq 0$ или $x \geq \log_5 3$.

Решим второе неравенство:

$$\log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \leq 0; \quad \begin{cases} \left(\frac{2x^2+3x+1}{3x+1} - 1 \right) (|x| - 1) \leq 0, \\ \frac{2x^2+3x+1}{3x+1} > 0, \\ \frac{2x^2+3x+1}{3x+1} \neq 1, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{3x+1} (x^2 - 1) \leq 0, \\ \frac{(2x+1)(x+1)}{3x+1} > 0, \\ \frac{2x^2}{3x+1} \neq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x-1)(x+1)}{3x+1} \leq 0, \\ \frac{(2x+1)(x+1)}{3x+1} > 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решим неравенство $\frac{(x-1)(x+1)}{3x+1} \leq 0$. Получим $x \leq -1$ или $-\frac{1}{3} < x \leq 1$.

Решим неравенство $\frac{(2x+1)(x+1)}{3x+1} > 0$. Получим $-1 < x < -\frac{1}{2}$ или $x > -\frac{1}{3}$.

Поэтому второе неравенство данной системы имеет решение

$$-\frac{1}{3} < x < 0 \text{ или } 0 < x \leq 1.$$

Поскольку $0 < \log_5 3 < 1$, данная система имеет решение

$$-\frac{1}{3} < x < 0 \text{ или } \log_5 3 \leq x \leq 1.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; 0\right); [\log_5 3; 1]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Решение:

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

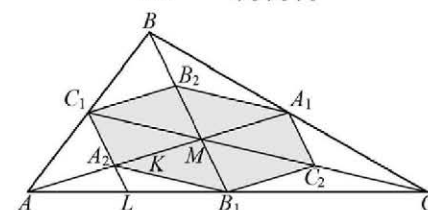
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

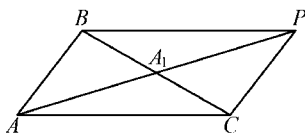
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, \quad S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, \quad S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, \quad S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2, \quad \text{откуда} \quad AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2). \quad \text{Аналогично}$$

$$\text{доказывается, что } BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2), \text{ а } CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Отрезок C_1A_2 – средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$.

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b .	3
Получен обоснованный ответ в пункте b , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

Решение:

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 3a - 1) - (x - a^2 + a + 2) = 2a - 3.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 3a - 1$, $n = x - a^2 + a + 2$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем

$$\begin{aligned} x - a^2 + a + 2 &\leq 0 \leq x - a^2 + 3a - 1; \\ a^2 - 3a + 1 &\leq x \leq a^2 - a - 2. \end{aligned}$$

Уравнение имеет корни, ни один из которых не принадлежит интервалу $(4; 19)$, только если правая граница отрезка решений не больше 4 или левая граница не меньше 19. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 \leq a^2 - a - 2, & 2a \geq 3, & \begin{cases} a \geq 1,5, \\ (a-3)(a+2) \leq 0, \end{cases} & \begin{cases} a \geq 1,5, \\ a \leq -3, \\ -2 \leq a \leq 3, \\ a \geq 6. \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 - a - 2 \leq 4, \\ a^2 - 3a + 1 \geq 19; \end{cases} & \begin{cases} a^2 - a - 6 \leq 0, \\ a^2 - 3a - 18 \geq 0; \end{cases} & \begin{cases} (a-3)(a+2) \leq 0, \\ (a-6)(a+3) \geq 0; \end{cases} & \begin{cases} a \leq -3, \\ -2 \leq a \leq 3, \\ a \geq 6. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $1,5 \leq a \leq 3$; $a \geq 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

- а) Пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна $36 - 14 = 22$. Если добавить число 4, то разность будет равна $100 - 30 = 70$, что ровно на 48 больше, чем было.

- б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ = 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ + 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ + \dots + \\ + 2a_3(a_1 + a_2) + \\ + 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d – разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1440,$$

откуда $n \leq 11$. Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.

- в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1440$ следует, что n является делителем числа 1440. Значит, $n \neq 11$.

Если $n = 10$, получаем

$$(a_1 + 10d)(2a_1 + 9d) = 144.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $90d^2 \geq 90 \cdot 4 = 360 > 144$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 9$, получаем

$$(a_1 + 9d)(2a_1 + 8d) = 160.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $72d^2 \geq 72 \cdot 4 = 288 > 160$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 8$, получаем:

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 180.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 180$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 124 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 4.

Значит, прогрессия из восьми чисел 4, 5, 6, ..., 11 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в.	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах б и в или в пунктах а и б.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены.	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Математика. 11 класс.

Вариант МА10306-10308

(без производной)

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}$. Из неё следует, что

$\sin^4 2x = \frac{1}{4}(\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1 + 3\cos 4x - 1 = 0;$$

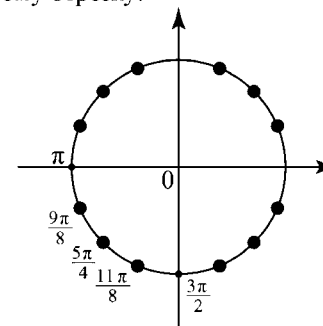
$$\cos^2 4x + \cos 4x = 0;$$

$$\cos 4x = -1 \quad \text{или} \quad \cos 4x = 0.$$

$$4x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим: $x = \frac{9\pi}{8}$; $x = \frac{5\pi}{4}$; $x = \frac{11\pi}{8}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

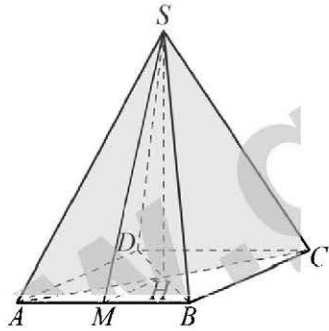
- C2** Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Решение.

Сторона основания пирамиды равна 8. Тогда диагональ основания AC равна $8\sqrt{2}$. Пусть SH – высота пирамиды. Тогда площадь сечения, проходящего через S и диагональ AC , равна $\frac{1}{2}AC \cdot SH = 64$, откуда $SH = \frac{2 \cdot 64}{8\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$. Пусть SM – высота грани SAB . Тогда

$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{128 + 16} = 12.$$

Следовательно, $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 = 48$. Поэтому площадь боковой поверхности равна $48 \cdot 4 = 192$.



Ответ: 192.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x - 5 \cdot 3^x + 4 \geq 0, \\ \log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделав замену $y = 3^x$, получаем

$$y^2 - 5y + 4 \geq 0; \quad y \leq 1 \text{ или } y \geq 4.$$

Значит, $x \leq 0$ или $x \geq \log_3 4$.

Решим второе неравенство:

$$\log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 0; \quad \begin{cases} \left(\frac{3x^2+4x+1}{4x+1} - 1 \right) \left(\left| \frac{x}{2} \right| - 1 \right) \leq 0, \\ \frac{3x^2+4x+1}{4x+1} > 0, \\ \frac{3x^2+4x+1}{4x+1} \neq 1, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x^2}{4x+1} \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right) \leq 0, \\ \frac{(3x+1)(x+1)}{4x+1} > 0, \\ \frac{3x^2}{4x+1} \neq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x-2)(x+2)}{4x+1} \leq 0, \\ \frac{(3x+1)(x+1)}{4x+1} > 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решим неравенство $\frac{(x-2)(x+2)}{4x+1} \leq 0$. Получим $x \leq -2$ или $-\frac{1}{4} < x \leq 2$.

Решим неравенство $\frac{(3x+1)(x+1)}{4x+1} > 0$. Получим $-1 < x < -\frac{1}{3}$ или $x > -\frac{1}{4}$.

Поэтому второе неравенство данной системы имеет решение

$$-\frac{1}{4} < x < 0 \text{ или } 0 < x \leq 2.$$

Поскольку $1 < \log_3 4 < 2$, данная система имеет решение $-\frac{1}{4} < x < 0$ или $\log_3 4 \leq x \leq 2$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{4}; 0\right); [\log_3 4; 2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

- С4** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
- а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
- б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=4$, $BC=7$ и $AC=8$.

Решение.

- а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB=2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

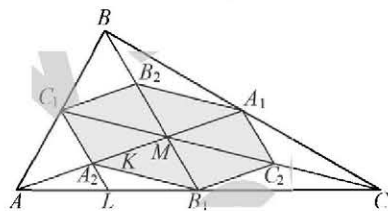
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

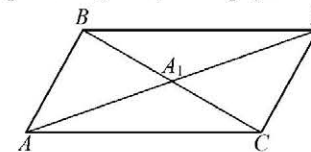
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$



- б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2, \text{ откуда } AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2). \text{ Аналогично доказы-}$$

$$\text{вается, что } BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2), \text{ а } CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$.

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{43}{2}$.

$$\text{Ответ: } \frac{43}{2}.$$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b .	3
Получен обоснованный ответ в пункте b , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C5

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

Решение.

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 4a - 2) - (x - a^2 + 2a + 3) = 2a - 5.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 4a - 2$, $n = x - a^2 + 2a + 3$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем:

$$x - a^2 + 2a + 3 \leq 0 \leq x - a^2 + 4a - 2;$$

$$a^2 - 4a + 2 \leq x \leq a^2 - 2a - 3.$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$, только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 2 \leq a^2 - 2a - 3, \\ a^2 - 2a - 3 \geq 5, \\ a^2 - 4a + 2 \leq 23; \end{cases} \begin{cases} 2a \geq 5, \\ a^2 - 2a - 8 \geq 0, \\ a^2 - 4a - 21 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq 2, 5, \\ (a - 4)(a + 2) \geq 0, \\ (a - 7)(a + 3) \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq 2, 5, \\ -3 \leq a \leq -2, \\ 4 \leq a \leq 7. \end{cases}$$

Ответ: $4 \leq a \leq 7$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

С6

Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Например, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов этих чисел равна $25 - 13 = 12$. Если добавить число 4, то разность будет равна $81 - 29 = 52$, что ровно на 40 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ & = 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ & + 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ & + \dots + \\ & + 2a_3(a_1 + a_2) + \\ & + 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d – разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1768,$$

откуда $n \leq 12$. Значит, 13 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1768$ следует, что n является делителем числа $1768 = 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 17$. Наибольший делитель, меньший 13, равен 8. При $n = 8$ получаем

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 221.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше, чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 221$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 165 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 5.

Значит, прогрессия из восьми чисел 5, 6, 7, ..., 12 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 2, 3; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>а</i> , <i>б</i> и <i>в</i> .	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>б</i> и <i>в</i> или в пунктах <i>а</i> и <i>б</i> .	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте <i>б</i> , пункты <i>а</i> и <i>в</i> не решены.	2
Приведён пример в пункте <i>а</i> , пункты <i>б</i> и <i>в</i> не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Математика. 11 класс.
Вариант МА10309-10311 (без логарифмов)
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

- а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 x = \frac{1}{4}(\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2}\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{2} + 3\cos 2x + 1 = 0;$$

$$\cos^2 2x + 4\cos 2x + 3 = 0.$$

Сделаем замену $t = \cos 2x$. Получим

$$t^2 + 4t + 3 = 0;$$

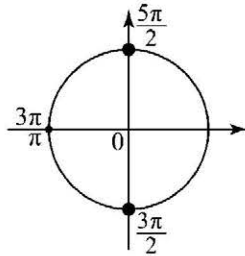
$$t = -1 \text{ или } t = -3;$$

$$\cos 2x = -1 \text{ или } \cos 2x = -3.$$

Уравнение $\cos 2x = -3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x = -1$ получаем

$$2x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

- б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим $x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

0

Максимальный балл

2

C2

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

Решение.

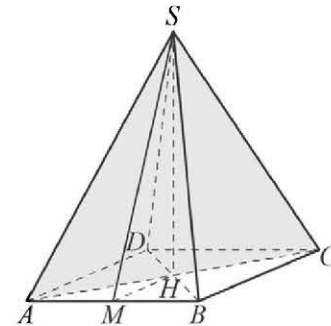
Площадь основания пирамиды равна $144 - 108 = 36$, поэтому $AB = 6$.

Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4} = 27$. Пусть SM – высота грани SAB .

Тогда $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 3 = 27$, поэтому $SM = 9$. Пусть SH – высота пирамиды. Имеем

$$SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 36$.



Ответ: 36.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-5)^{-1}}{2(x-5)^{-1} - 1} \leq -0,5. \end{cases}$$

Решение:

Решим первое неравенство:

$$1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}; \quad \frac{x^2 - 2|x| - 23}{x^2} \leq 0; \quad \frac{(|x| - 1 - 2\sqrt{6})(|x| + 2\sqrt{6} - 1)}{x^2} \leq 0;$$

$$\frac{(x - 1 - 2\sqrt{6})(x + 1 + 2\sqrt{6})}{x^2} \leq 0.$$

Получаем $-1 - 2\sqrt{6} \leq x < 0$ или $0 < x \leq 1 + 2\sqrt{6}$.Решим второе неравенство. Сделаем замену $y = \frac{1}{x-5}$. Получим:

$$\frac{2-y}{2y-1} \leq -0,5; \quad \frac{1,5}{2y-1} \leq 0; \quad y < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\frac{1}{x-5} < \frac{1}{2}$; $\frac{7-x}{x-5} < 0$; $x < 5$ или $x > 7$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств.

Поскольку $5 < 1 + 2\sqrt{6} < 7$, получаем

$$-1 - 2\sqrt{6} \leq x < 0 \text{ или } 0 < x < 5.$$

Ответ: $[-1 - 2\sqrt{6}; 0)$, $(0; 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4

Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Решение:

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

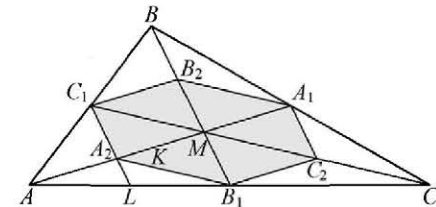
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

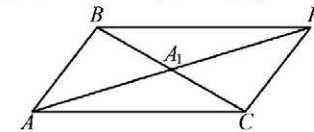
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, \quad S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, \quad S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, \quad S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $AP = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2, \quad \text{откуда} \quad AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2). \quad \text{Аналогично}$$

доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$.

Отрезок C_1A_2 – средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$.

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b .	3
Получен обоснованный ответ в пункте b , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

Решение:

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 3a - 1) - (x - a^2 + a + 2) = 2a - 3.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 3a - 1$, $n = x - a^2 + a + 2$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем

$$\begin{aligned} x - a^2 + a + 2 &\leq 0 \leq x - a^2 + 3a - 1; \\ a^2 - 3a + 1 &\leq x \leq a^2 - a - 2. \end{aligned}$$

Уравнение имеет корни, ни один из которых не принадлежит интервалу $(4; 19)$, только если правая граница отрезка решений не больше 4 или левая граница не меньше 19. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 \leq a^2 - a - 2, \\ a^2 - a - 2 \leq 4, \\ a^2 - 3a + 1 \geq 19, \end{cases} \begin{cases} 2a \geq 3, \\ a^2 - a - 6 \leq 0, \\ a^2 - 3a - 18 \geq 0, \end{cases} \begin{cases} a \geq 1,5, \\ (a-3)(a+2) \leq 0, \\ (a-6)(a+3) \geq 0, \end{cases} \begin{cases} a \geq 1,5, \\ a \leq -3, \\ -2 \leq a \leq 3, \\ a \geq 6. \end{cases}$$

Ответ: $1,5 \leq a \leq 3$; $a \geq 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

C6

Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна $36 - 14 = 22$. Если добавить число 4, то разность будет равна $100 - 30 = 70$, что ровно на 48 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ &= 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ &+ 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ &+ \dots + \\ &+ 2a_3(a_1 + a_2) + \\ &+ 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d – разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1440,$$

откуда $n \leq 11$. Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1440$ следует, что n является делителем числа 1440. Значит, $n \neq 11$.

Если $n = 10$, получаем

$$(a_1 + 10d)(2a_1 + 9d) = 144.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $90d^2 \geq 90 \cdot 4 = 360 > 144$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 9$, получаем

$$(a_1 + 9d)(2a_1 + 8d) = 160.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $72d^2 \geq 72 \cdot 4 = 288 > 160$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 8$, получаем:

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 180.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 180$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 124 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 4.

Значит, прогрессия из восьми чисел 4, 5, 6, ..., 11 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в.	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах б и в или в пунктах а и б.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены.	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Математика. 11 класс.
Вариант МА103010-10312 (без логарифмов)
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

- а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 2x = \frac{1}{4}(\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1 + 3\cos 4x - 1 = 0;$$

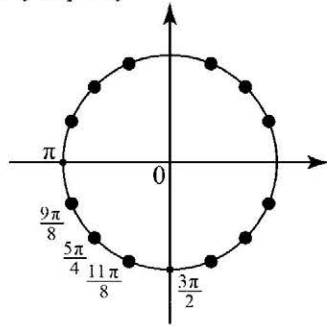
$$\cos^2 4x + \cos 4x = 0;$$

$$\cos 4x = -1 \quad \text{или} \quad \cos 4x = 0.$$

$$4x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим: $x = \frac{9\pi}{8}$; $x = \frac{5\pi}{4}$; $x = \frac{11\pi}{8}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

0

Максимальный балл

2

C2

Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

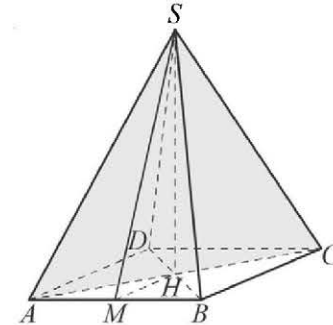
Решение.

Сторона основания пирамиды равна 8. Тогда диагональ основания AC равна $8\sqrt{2}$. Пусть SH – высота пирамиды. Тогда площадь сечения, проходящего через S и диагональ AC , равна $\frac{1}{2}AC \cdot SH = 64$, откуда

$$SH = \frac{2 \cdot 64}{8\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}. \text{ Пусть } SM - \text{высота грани } SAB. \text{ Тогда}$$

$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{128 + 16} = 12.$$

Следовательно, $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 = 48$. Поэтому площадь боковой поверхности равна $48 \cdot 4 = 192$.



Ответ: 192.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \frac{4}{|x|} \leq \frac{20}{x^2}, \\ \frac{2 - (x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1} - 1} \leq -0,2. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$1 - \frac{4}{|x|} \leq \frac{20}{x^2}; \quad \frac{x^2 - 4|x| - 20}{x^2} \leq 0; \quad \frac{(|x| - 2 - 2\sqrt{6})(|x| + 2\sqrt{6} - 2)}{x^2} \leq 0;$$

$$\frac{(x - 2 - 2\sqrt{6})(x + 2 + 2\sqrt{6})}{x^2} \leq 0.$$

Получаем $-2 - 2\sqrt{6} \leq x < 0$ или $0 < x \leq 2 + 2\sqrt{6}$.

Решим второе неравенство. Сделаем замену $y = \frac{1}{x-6}$. Получим

$$\frac{2-y}{5y-1} \leq -0,2; \quad \frac{1,8}{5y-1} \leq 0; \quad y < \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $\frac{1}{x-6} < \frac{1}{5}$; $\frac{11-x}{x-6} < 0$; $x < 6$ или $x > 11$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств.

Поскольку $6 < 2 + 2\sqrt{6} < 11$, получаем

$$-2 - 2\sqrt{6} \leq x < 0 \text{ или } 0 < x < 6.$$

Ответ: $[-2 - 2\sqrt{6}; 0)$, $(0; 6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

Решение.

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

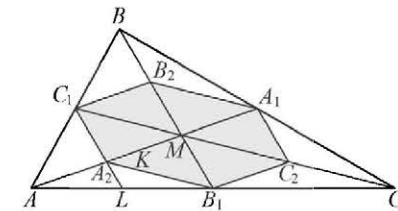
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

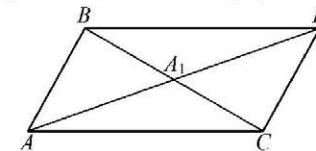
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, \quad S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, \quad S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, \quad S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2$, откуда $AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Аналогично доказыва-
ется, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$.

Отрезок C_1A_2 – средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое
меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$.

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ:

сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{43}{2}$.

Ответ: $\frac{43}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b .	3
Получен обоснованный ответ в пункте b , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5, 23]$.

Решение.

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 4a - 2) - (x - a^2 + 2a + 3) = 2a - 5.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 4a - 2$, $n = x - a^2 + 2a + 3$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем:

$$\begin{aligned} x - a^2 + 2a + 3 &\leq 0 \leq x - a^2 + 4a - 2; \\ a^2 - 4a + 2 &\leq x \leq a^2 - 2a - 3. \end{aligned}$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $[5, 23]$, только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 2 \leq a^2 - 2a - 3, \\ a^2 - 2a - 3 \geq 5, \\ a^2 - 4a + 2 \leq 23; \end{cases} \begin{cases} 2a \geq 5, \\ a^2 - 2a - 8 \geq 0, \\ a^2 - 4a - 21 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq 2,5, \\ (a - 4)(a + 2) \geq 0, \\ (a - 7)(a + 3) \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq 2,5, \\ -3 \leq a \leq -2, \\ 4 \leq a \leq 7. \end{cases}$$

Ответ: $4 \leq a \leq 7$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

C6

Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Например, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов этих чисел равна $25 - 13 = 12$. Если добавить число 4, то разность будет равна $81 - 29 = 52$, что ровно на 40 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ &= 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ &+ 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ &+ \dots + \\ &+ 2a_3(a_1 + a_2) + \\ &+ 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d – разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1768,$$

откуда $n \leq 12$. Значит, 13 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1768$ следует, что n является делителем числа $1768 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 17$. Наибольший делитель, меньший 13, равен 8. При $n = 8$ получаем

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 221.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше, чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 221$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 165 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 5.

Значит, прогрессия из восьми чисел 5, 6, 7, ..., 12 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 2, 3; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>а</i> , <i>б</i> и <i>в</i> .	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>б</i> и <i>в</i> или в пунктах <i>а</i> и <i>б</i> .	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте <i>б</i> , пункты <i>а</i> и <i>в</i> не решены.	2
Приведён пример в пункте <i>а</i> , пункты <i>б</i> и <i>в</i> не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Математика. 11 класс.
Вариант МА10313-10315 (без производной)
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

- а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 x = \frac{1}{4}(\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2}\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{2} + 3\cos 2x + 1 = 0;$$

$$\cos^2 2x + 4\cos 2x + 3 = 0.$$

Сделаем замену $t = \cos 2x$. Получим

$$t^2 + 4t + 3 = 0;$$

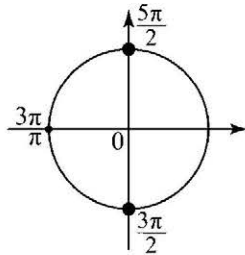
$$t = -1 \text{ или } t = -3;$$

$$\cos 2x = -1 \text{ или } \cos 2x = -3.$$

Уравнение $\cos 2x = -3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x = -1$ получаем

$$2x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим $x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

0

Максимальный балл

2

C2

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

Решение.

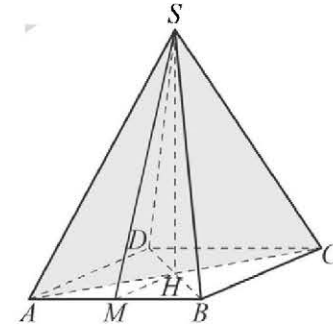
Площадь основания пирамиды равна $144 - 108 = 36$, поэтому $AB = 6$.

Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4} = 27$. Пусть SM – высота грани SAB .

Тогда $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 3 = 27$, поэтому $SM = 9$. Пусть SH – высота пирамиды. Имеем

$$SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 36$.



Ответ: 36.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 4 \cdot 5^x + 3 \geq 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделав замену $y = 5^x$, получаем

$$y^2 - 4y + 3 \geq 0; \quad y \leq 1 \text{ или } y \geq 3.$$

Значит, $x \leq 0$ или $x \geq \log_5 3$.

Решим второе неравенство:

$$\log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \leq 0; \quad \begin{cases} \left(\frac{2x^2+3x+1}{3x+1} - 1 \right) (|x| - 1) \leq 0, \\ \frac{2x^2+3x+1}{3x+1} > 0, \\ \frac{2x^2+3x+1}{3x+1} \neq 1, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{3x+1} (x^2 - 1) \leq 0, \\ \frac{(2x+1)(x+1)}{3x+1} > 0, \\ \frac{2x^2}{3x+1} \neq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x-1)(x+1)}{3x+1} \leq 0, \\ \frac{(2x+1)(x+1)}{3x+1} > 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решим неравенство $\frac{(x-1)(x+1)}{3x+1} \leq 0$. Получим $x \leq -1$ или $-\frac{1}{3} < x \leq 1$.

Решим неравенство $\frac{(2x+1)(x+1)}{3x+1} > 0$. Получим $-1 < x < -\frac{1}{2}$ или $x > -\frac{1}{3}$.

Поэтому второе неравенство данной системы имеет решение

$$-\frac{1}{3} < x < 0 \text{ или } 0 < x \leq 1.$$

Поскольку $0 < \log_5 3 < 1$, данная система имеет решение

$$-\frac{1}{3} < x < 0 \text{ или } \log_5 3 \leq x \leq 1.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; 0\right); [\log_5 3; 1]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C4 Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Решение:

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

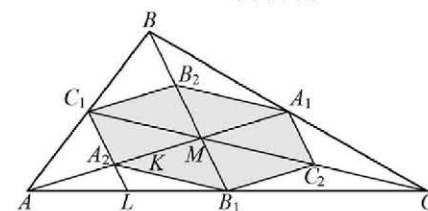
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

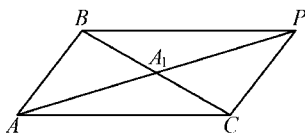
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, \quad S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, \quad S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, \quad S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2, \quad \text{откуда} \quad AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2). \quad \text{Аналогично}$$

$$\text{доказывается, что } BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2), \text{ а } CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Отрезок C_1A_2 – средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$.

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b .	3
Получен обоснованный ответ в пункте b , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

- C5** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

Решение:

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 3a - 1) - (x - a^2 + a + 2) = 2a - 3.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 3a - 1$, $n = x - a^2 + a + 2$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем

$$x - a^2 + a + 2 \leq 0 \leq x - a^2 + 3a - 1;$$

$$a^2 - 3a + 1 \leq x \leq a^2 - a - 2.$$

Уравнение имеет корни, ни один из которых не принадлежит интервалу $(4; 19)$, только если правая граница отрезка решений не больше 4 или левая граница не меньше 19. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 \leq a^2 - a - 2, \\ a^2 - a - 2 \leq 4, \\ a^2 - 3a + 1 \geq 19; \end{cases} \begin{cases} 2a \geq 3, \\ a^2 - a - 6 \leq 0, \\ a^2 - 3a - 18 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq 1, 5, \\ (a - 3)(a + 2) \leq 0, \\ (a - 6)(a + 3) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} a \leq -3, \\ -2 \leq a \leq 3, \\ a \geq 6. \end{cases}$$

Ответ: $1, 5 \leq a \leq 3$; $a \geq 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

- C6** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна $36 - 14 = 22$. Если добавить число 4, то разность будет равна $100 - 30 = 70$, что ровно на 48 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ & = 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ & + 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ & + \dots + \\ & + 2a_3(a_1 + a_2) + \\ & + 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d – разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1440,$$

откуда $n \leq 11$. Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1440$ следует, что n является делителем числа 1440. Значит, $n \neq 11$.

Если $n = 10$, получаем

$$(a_1 + 10d)(2a_1 + 9d) = 144.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $90d^2 \geq 90 \cdot 4 = 360 > 144$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 9$, получаем

$$(a_1 + 9d)(2a_1 + 8d) = 160.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $72d^2 \geq 72 \cdot 4 = 288 > 160$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 8$, получаем:

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 180.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 180$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 124 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 4.

Значит, прогрессия из восьми чисел 4, 5, 6, ..., 11 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в.	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах б и в или в пунктах а и б.	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены.	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Математика. 11 класс.

Вариант МА10314-10316

(без производной)

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}$. Из неё следует, что

$\sin^4 2x = \frac{1}{4}(\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\cos^2 4x - 2\cos 4x + 1 + 3\cos 4x - 1 = 0;$$

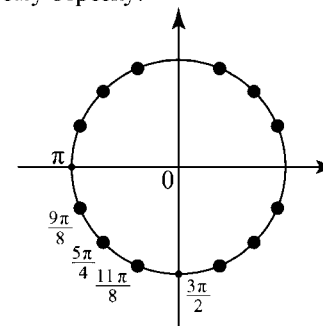
$$\cos^2 4x + \cos 4x = 0;$$

$$\cos 4x = -1 \quad \text{или} \quad \cos 4x = 0.$$

$$4x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим: $x = \frac{9\pi}{8}$; $x = \frac{5\pi}{4}$; $x = \frac{11\pi}{8}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

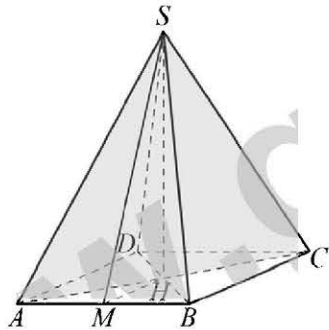
- C2** Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, и площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания, тоже равна 64. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Решение.

Сторона основания пирамиды равна 8. Тогда диагональ основания AC равна $8\sqrt{2}$. Пусть SH – высота пирамиды. Тогда площадь сечения, проходящего через S и диагональ AC , равна $\frac{1}{2}AC \cdot SH = 64$, откуда $SH = \frac{2 \cdot 64}{8\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$. Пусть SM – высота грани SAB . Тогда

$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{128 + 16} = 12.$$

Следовательно, $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 = 48$. Поэтому площадь боковой поверхности равна $48 \cdot 4 = 192$.



Ответ: 192.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^x - 5 \cdot 3^x + 4 \geq 0, \\ \log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $y = 3^x$, получаем

$$y^2 - 5y + 4 \geq 0; \quad y \leq 1 \text{ или } y \geq 4.$$

Значит, $x \leq 0$ или $x \geq \log_3 4$.

Решим второе неравенство:

$$\log_{\frac{3x^2+4x+1}{4x+1}} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 0; \quad \begin{cases} \left(\frac{3x^2+4x+1}{4x+1} - 1 \right) \left(\left| \frac{x}{2} \right| - 1 \right) \leq 0, \\ \frac{3x^2+4x+1}{4x+1} > 0, \\ \frac{3x^2+4x+1}{4x+1} \neq 1, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x^2}{4x+1} \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right) \leq 0, \\ \frac{(3x+1)(x+1)}{4x+1} > 0, \\ \frac{3x^2}{4x+1} \neq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x-2)(x+2)}{4x+1} \leq 0, \\ \frac{(3x+1)(x+1)}{4x+1} > 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решим неравенство $\frac{(x-2)(x+2)}{4x+1} \leq 0$. Получим $x \leq -2$ или $-\frac{1}{4} < x \leq 2$.

Решим неравенство $\frac{(3x+1)(x+1)}{4x+1} > 0$. Получим $-1 < x < -\frac{1}{3}$ или $x > -\frac{1}{4}$.

Поэтому второе неравенство данной системы имеет решение

$$-\frac{1}{4} < x < 0 \text{ или } 0 < x \leq 2.$$

Поскольку $1 < \log_3 4 < 2$, данная система имеет решение $-\frac{1}{4} < x < 0$ или $\log_3 4 \leq x \leq 2$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{4}; 0\right); [\log_3 4; 2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах.	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

С4 Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB=4$, $BC=7$ и $AC=8$.

Решение.

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB=2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

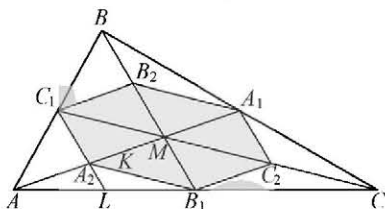
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем ещё 5 равенств:

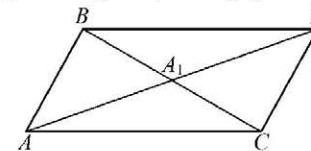
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2, \text{ откуда } AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2). \text{ Аналогично доказы-}$$

$$\text{вается, что } BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2), \text{ а } CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$.

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ:

сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{43}{2}$.

Ответ: $\frac{43}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обосновано получен верный ответ в пункте b .	3
Получен обоснованный ответ в пункте b , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

Решение.

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 4a - 2) - (x - a^2 + 2a + 3) = 2a - 5.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 4a - 2$, $n = x - a^2 + 2a + 3$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем:

$$x - a^2 + 2a + 3 \leq 0 \leq x - a^2 + 4a - 2;$$

$$a^2 - 4a + 2 \leq x \leq a^2 - 2a - 3.$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$, только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 2 \leq a^2 - 2a - 3, \\ a^2 - 2a - 3 \geq 5, \\ a^2 - 4a + 2 \leq 23; \end{cases} \begin{cases} 2a \geq 5, \\ a^2 - 2a - 8 \geq 0, \\ a^2 - 4a - 21 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq 2, 5, \\ (a - 4)(a + 2) \geq 0, \\ (a - 7)(a + 3) \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq 2, 5, \\ -3 \leq a \leq -2, \\ 4 \leq a \leq 7. \end{cases}$$

Ответ: $4 \leq a \leq 7$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

С6

Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Например, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов этих чисел равна $25 - 13 = 12$. Если добавить число 4, то разность будет равна $81 - 29 = 52$, что ровно на 40 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ &= 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ &+ 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ &+ \dots + \\ &+ 2a_3(a_1 + a_2) + \\ &+ 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d – разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1768,$$

откуда $n \leq 12$. Значит, 13 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1768$ следует, что n является делителем числа $1768 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 17$. Наибольший делитель, меньший 13, равен 8. При $n = 8$ получаем

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 221.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше, чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 221$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 165 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 5.

Значит, прогрессия из восьми чисел 5, 6, 7, ..., 12 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 2, 3; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>а</i> , <i>б</i> и <i>в</i> .	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>б</i> и <i>в</i> или в пунктах <i>а</i> и <i>б</i> .	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте <i>б</i> , пункты <i>а</i> и <i>в</i> не решены.	2
Приведён пример в пункте <i>а</i> , пункты <i>б</i> и <i>в</i> не решены.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4